УДК 622.24.05

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СОУДАРЕНИЯ БОЙКА С ХВОСТОВИКОМ УДАРНОГО ИНСТРУМЕНТА

А.П. Слистин, Л.А. Саруев

Юргинский технологический институт Томского политехнического университета
E-mail: yftpu@mail.ru

Предложена математическая модель, описывающая ударное взаимодействие бойка (ударника) переменного поперечного сечения с хвостовиком ударного инструмента. Получены параметры этого взаимодействия: продольная сила, скорость частиц материала, поток мощности и другие характеристики, имеющие хорошее совпадение с экспериментальными данными.

Опыт применения машин ударного действия вызвал необходимость решения ряда проблем, понимание которых невозможно без анализа ударного воздействия на ударный инструмент. Изучение влияния конструктивных параметров бойка на формирование продольных волн в ударном инструменте представляет интерес и для практики конструирования машин ударного действия.

Удар бойком по торцу хвостовика ударного инструмента приводит к формированию продольных волн, как в хвостовике, так и в бойке [1–3]. Волновое поле бойка в свою очередь оказывает влияние на формирование волны в хвостовике. В данной работе рассмотрена задача об инициировании волн в бойке торцевым продольным ударом бойка по ударному инструменту.

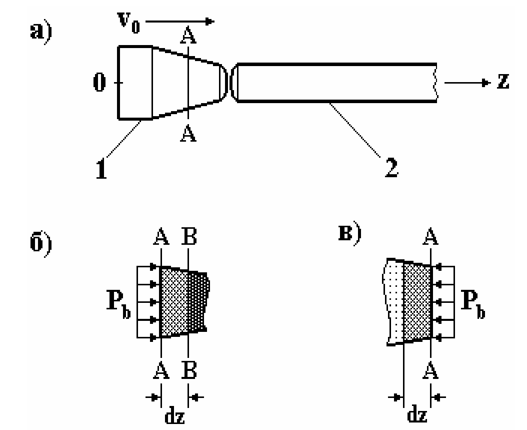


Рис. 1. *Схема удара бойка по хвостовику ударного инструмента: 1) боек; 2) хвостовик*

Введем систему координат $0z$, выбирая начало оси на свободном (левом) торце бойка и направляя ее к ударному инструменту (рис. 1). Допустим, известны длина бойка l_b и его площадь поперечного сечения $S_b=S_b(z)$. Пусть также задана скорость бойка v_0 в момент соударения, принимаемый далее за $t=0$. Считаем, что закон распространения продольных волн, как бойке, так и ударном инструменте, носит линейный характер. В данном случае это означает, что распространяющиеся волны будут проходить сквозь друг друга не взаимодействуя. Предположим, что боек изготовлен из материала с параметрами: ρ – плотность, E – модуль Юнга. Тогда скорость распространения продольных волн в бойке будет равна $c_0=\sqrt{E/\rho}$.

Рассмотрим фронт волны сжатия, распространяющейся внутри бойка. Разобьем боек сечениями на участки бесконечно малой длины dz (пластины). Будем рассматривать формирование волны внутри бойка как следствие взаимодействия этих участков. Предположим, что фронт волны достиг некоторого сечения с координатой z. Обозначим это сечение через А-А (рис. 1, *а*).

Слева от сечения А-А движется участок бойка, длиной dz, имеющий скорость v_0, направленную вправо, и являющийся ненагруженным (внутренняя сила равна нулю). Участок бойка, расположенный справа от сечения А-А, имеет в общем случае другие значения скорости и силы. Происходит взаимодействие участков, расположенных слева и справа от сечения А-А (соударение). Обозначим внутреннюю силу этого взаимодействия через P_b. Определим параметры эффектов, возникающих вследствие воздействия силы P_b в течение бесконечно малого промежутка времени dt.

За время dt волна, расположенная правее сечения А-А , сместится вправо на расстояние $dz=c_0dt$, и ее задний фронт займет положение В-В (рис. 1, *б*). Действие силы $Pb\neq0$ формирует волну сжатия.

Аналогично, рассматривая участок, расположенный левее сечения А-А (рис. 1, *в*), найдем (закон равенства действия и противодействия), что волна сжатия сформируется и в нем и распространится на тоже расстояние $dz=c_0dt$.

Таким образом, участок бойка длиной dz, имеющий скорость v_0, инициирует волну как слева, так и справа от сечения А-А суммарной длиной $2dz$. То есть каждый участок длиной dz присоединяет к ранее сформированной волне новый участок длиной $2dz$ и эта более длинная волна распространяется в положительном направлении оси $0z$. Так как указанное замечание справедливо для каждого участка, то общая длина сформированной волны будет равна $2l_b$.

Далее будем обозначать параметры волны на участке, расположенном слева от сечения А-А индексом 1, а на расположенном справа от сечения А-А – индексом 2. Для определения скоростей v_{b1}, v_{b2} элементарных пластин после соударения применим теорему о сохранении количества движения

$$\rho\cdot S_{b1}\cdot dz\cdot v_0=\rho\cdot S_{b1}\cdot dz\cdot v_{b1}+\rho\cdot S_{b2}\cdot dz\cdot v_{b2}. \quad (1)$$

Обозначим через $S_b(z-0)S_{b1}$, $S_b(z+0)=S_{b2}$ соответствующие предельные значения площади$S_b(z)$. После несложных преобразований (1) можно представить в виде

$$S_b(z-0)\cdot v_0=S_b(z-0)\cdot v_{b1}+S_b(z+0)\cdot v_{b2}. \quad (2)$$

Требование неразрывности материала бойка вдоль оси z приводит к соотношению $v_{b1}=v_{b2}$ (абсолютно неупругий удар). Тогда из (2) следует

$$v_{b1}=v_{b2}=\frac{S_b(z-0)}{S_b(z-0)+S_b(z+0)}\cdot v_0. \quad (3)$$

При непрерывной функции $S_b(z)$ выполняется равенство $S_b(z-0)=S_b(z+0)$ и (3) примет вид

$$v_b=v_{b1}=v_{b2}=\frac{v_0}{2}. \quad (4)$$

Сделаем следующее замечание. Равенство (4) следует из (3) при непрерывной функции $S_b(z)$. Если это условие не выполняется, то функция $v_b(z)$ будет разрывной в соответствующих сечениях. При этом предельные значения в точках разрыва, как справа, так и слева будут иметь значения $v_0/2$. Такая функция отличается от непрерывной на так называемую нулевую функцию $n(z)$, то есть на функцию, обладающую свойством

$$\int_0^z n(z)\,dz\equiv0 \quad \text{при всех } z\geq0.$$

Такие функции в математике обычно рассматриваются как совпадающие. Поэтому, доопределяя в точках разрыва функцию $v_b(z)$ значением $v_0/2$, получим непрерывную функцию. В дальнейшем будем предполагать, что эта операция проделана, и функция $v_b(z)$ является непрерывной.

Определим внутреннюю силу P_b. Энергия на начало взаимодействия участков равна кинетической энергии левого участка

$$U_k=\frac{\rho\,S_b(z)\,dz\cdot v_0^2}{2}.$$

Энергия в конце взаимодействия будет складываться из кинетической энергии частиц материала, захваченных волной сжатия длиной $2dz$, и потенциальной энергии сжатых участков по обе стороны сечения А-А

$$U=\frac{\rho\,S_b(z)\,2\,dz\cdot v_b^2}{2}+\frac{P_b^2\cdot2\,dz}{2\,E\,S_b(z)}.$$

На основе закона о сохранении энергии

$$\frac{\rho\,S_b(z)\cdot v_0^2}{2}=\frac{\rho\,S_b(z)\cdot v_0^2}{4}+\frac{P_b^2}{E\,S_b(z)}. \quad (5)$$

При выводе равенства (5) учтено соотношение (4). После несложных преобразований из (5) следует

$$P_b=-\frac{\sqrt{\rho\,E}\cdot S_b(z)\cdot v_0}{2}. \quad (6)$$

Знак минус в формуле (6) учитывает, что удар бойком формирует волну сжатия.

Отметим, что абсолютно неупругий удар подразумевает поглощение энергии в зоне контакта. Это явление действительно происходит, но поглощенная энергия в данном случае уходит на формирование волн.

Как уже было замечено, удар бойком длиной l_b инициирует в бойке волну длиной $2l_b$. Кажущееся несоответствие объясняется просто. За время инициирования волны $T_y=2l_b/c_0$ половина волны уже уйдет в ударный инструмент (или отразится от него), а оставшаяся половина займет весь боек.

С целью упрощения расчетов данный процесс можно смоделировать следующим образом. "Растянем" боек до длины $2l_b$ оставляя координату $z=l_b$ контакта боек-хвостовик постоянной. Введем переменную

$$z_c = 2z - l_b .$$

Тогда формулы (4), (6) примут вид

$$v_b(z_c) = \frac{v_0}{2}, \tag{7}$$

$$P_b(z_c) = -\frac{E \cdot S_b(z_c) \cdot v_0}{2c_0}, \tag{8}$$

где $-l_b \le z_c \le l_b$ и учтено, что $c_0=\sqrt{E/\rho}$. Легко заметить, что найденные значения P_b, v_b связаны соотношением

$$P_b(z_c) = -\frac{E \cdot S_b(z_c)}{c_0} \cdot v_b(z_c), \tag{9}$$

которое всегда выполняется для значений силы и скорости в волне [3].

Сформированная волна с параметрами (7, 8) начинает распространяться в прямом направлении (к хвостовику ударного инструмента). В дальнейшем будут представлять интерес параметры волны, падающей на ударный торец бойка ("волна на торце"). Обозначим площадь поперечного сечения бойка на ударном торце через S_{bc}. Вследствие малой длины бойка пренебрежем потерями энергии за счет внутреннего трения при пробеге волны до удар ного сечения.

Для нахождения параметров волны, проходящей через сечение площадью S_{bc}, воспользуемся равенством потоков мощности, создаваемыми сформированной волной (7, 8) и "волной на торце". С целью упрощения пересчитаем параметры сформированной волны при ее "старте" предполагая, что в дальнейшем она движется по участку площадью S_{bc} без искажения.

Поток мощности, создаваемый сформированной в бойке волной равен

$$N_b = -P_b \cdot v_b = \frac{E\, S_b(z_c) \cdot v_0^2}{4c_0}. \tag{10}$$

Обозначим параметры "волны на торце" через P_b, v_b. Эти параметры связаны соотношением типа (9). Тогда

$$v_c = -\frac{c_0 P_c}{E\, S_{bc}}. \tag{11}$$

Поток мощности в "волне на торце"

$$N_c = -P_c \cdot v_c = \frac{c_0}{E\, S_{bc}} P_c^2 . \tag{12}$$

Равенство потоков мощности (10) и (12) приводит к соотношению

$$\frac{c_0}{E\, S_{bc}} P_c^2 = \frac{E\, S_b(z_c)}{c_0} \cdot \frac{v_0^2}{4}.$$

Откуда

$$P_c(z_c) = -\frac{E}{c_0} \cdot \sqrt{S_{bc} \cdot S_b(z_c)} \cdot \frac{v_0}{2}. \tag{13}$$

Скорости сечений в "волне на торце" найдутся по формуле (11), которая в данном случае примет вид:

$$v_c(z_c) = \sqrt{\frac{S_b(z_c)}{S_{bc}}} \cdot \frac{v_0}{2}. \tag{14}$$

Значения, определяемые по формулам (13, 14), являются начальными (стартовыми) значениями для волн. Так, например, значения скорости сечений в волне будут равны

$$v_c(z_c - c_0 t) = \sqrt{\frac{S_b(z_c - c_0 t)}{S_{bc}}} \cdot \frac{v_0}{2}, \tag{15}$$

а значения силы – равны

$$P_c(z_c - c_0 t) = -\frac{E}{c_0} \cdot \sqrt{S_{bc} \cdot S_b(z_c - c_0 t)} \cdot \frac{v_0}{2}. \tag{16}$$

Распределение смещений можно получить интегрированием зависимости

$$v_c(z_c, t) = \frac{\partial u_c(z_c, t)}{\partial t}.$$

Дальнейшее поведение волны, сформированной в бойке с параметрами (15, 16), зависит от условий на контакте боек-хвостовик. Так, например, если площадь ударного торца хвостовика равна S_{bc} и соударяющиеся торцы плоские, то в ударном инструменте будет распространяться волна с теми же параметрами. Поведение волны с другими условиями контакта рассмотрено в [2].

Следует отметить, что предложенная в данном разделе модель ударного взаимодействия тел (бойка с ударным инструментом) несколько отличается от общепринятой в настоящее время модели соударения [1–3]. Рассмотрим эти различия на примере соударения прямолинейного стержня постоянного поперечного сечения с абсолютно жесткой преградой, считая, что скорость стержня направлена вдоль его оси и равна v_0 (рис. 2).

По существующей модели процесс формирования волны в бойке складывается из двух этапов. На первом этапе в бойке при ударе начинает распространяться со скоростью c_0 "волна сжатия". После того как эта волна охватит всю длину стержня, на втором этапе, начнется разгрузка сечений – от свободного торца к ударному, пока не исчезнут напряжения во всех сечениях ("волна разгрузки"), после этого произойдет отскок стержня.

Если воспользоваться принятыми в данной работе обозначениями, продольные усилия и скорость в "волне сжатия" определятся из соотношений

$$P_b = \rho c_0 S_b v_0,\; v_b = 0. \quad (17)$$

В “волне разгрузки” продольная сила и скорость равны

$$P_b = 0,\; v_b = -v_0, \quad (18)$$

(скорость направлена от препятствия).

Заметим, что указанные в (17) и (18) параметры не удовлетворяют основному соотношению (9) для параметров волн общего вида. Исключением является первое равенство из (17), но оно связывает параметры разных сечений бойка: до фронта “волны сжатия” и после него.

Рассмотрим инициирование волны согласно рассмотренной в данной работе модели соударения. Удар бойка о преграду инициирует в бойке волну сжатия. Эта волна распространяется к преграде, увеличивая свою длину за счет присоединения новых участков. Каждый новый присоединяемый участок длиной dz увеличивает длину волны на $2dz$, а волна за время присоединения смещается к преграде на величину dz.



Рис. 2. *Схема соударения бойка постоянного поперечного сечения с абсолютно жесткой преградой. Показаны эпюры продольной силы в распространяющихся волнах*

Инициированная волна взаимодействует с преградой и отражается от нее также волной сжатия, при этом скорости сечений будут равны по величине и противоположно направлены. Так как процессы инициирования волны и формирования отраженной начинаются одновременно, то эти волны будут одинаковой длины и занимать один и тот же участок бойка (рис. 2, *а*).

Формулы (13, 14) при   примут вид

$$P_b = -\frac{E\,S_b}{c_0}\cdot\frac{v_0}{2},\; v_b = \frac{v_0}{2}.$$

Отраженная волна имеет параметры

$$P_b = -\frac{E\,S_b}{c_0}\cdot\frac{v_0}{2},\; v_b = -\frac{v_0}{2}. \quad (19)$$

Суммарное волновое поле для сжатого участка бойка определится параметрами

$$P_b^{\Sigma} = -\frac{E\,S_b}{c_0}\cdot v_0,\; v_b^{\Sigma} = 0. \quad (20)$$

С учетом равенства $E/c_0 = \rho c_0$ легко заметить, что формулы (17) совпадают с формулами (20).

Область сжатия в бойке увеличивает свою длину за счет присоединения новых участков (“волна сжатия”) пока не будет равна длине бойка. Далее волна, распространяющаяся влево, отразится от свободного торца волной растяжения, (рис. 2, *б*) и будет распространяться к ударному торцу бойка, занимая область, освобождающуюся при движении волны сжатия в том же направлении. Параметры этой дважды отраженной волны (вначале от ударного торца бойка, а затем свободного от торца) будут равны

$$P_b = \frac{E\,S_b}{c_0}\cdot\frac{v_0}{2},\; v_b = -\frac{v_0}{2}. \quad (21)$$

Суммарное волновое поле, образованное дважды отраженной волной с параметрами (19) и волной, движущейся влево, с параметрами (21), будет иметь следующие значения

$$P_b^{\Sigma} = 0, \quad v_b^{\Sigma} = -v_0. \quad (22)$$

При достижении дважды отраженной волны ударного торца бойка произойдет отскок стержня от преграды. Легко заметить, что формулы (18) совпадают с формулами (22).

Таким образом, сравнение существующего метода расчета инициализации волн в бойке и метода, предложенного в данной работе, показывает, что предложенный метод уточняет механизм образования и распространения волн.

Выводы

- Предложена уточненная волновая модель, описывающая ударное взаимодействие тел.
- Получены параметры волны, сформированной ударом: продольная сила, скорость частиц материала, поток мощности и другие характеристики.
- Отмечены различия между предложенной в работе моделью и существующей в настоящее время на примере удара стержня о жесткую преграду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
2. Иванов К.И., Латышев В.А., Андреев В.Д. Техника бурения при разработке месторождений полезных ископаемых. – М.: Недра, 1987. – 272 с.
3. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.